Hausübung V zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2013/14

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld

Abgabe 19.11.2013 vor der Vorlesung PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

---

KRAFTFELDER UND POTENTIALE

Kraftfelder, zu denen es ein Potential gibt, haben die schöne Eigenschaft, dass die in ihnen zu verrichtende Arbeit nicht vom Weg abhängt, den man zwischen zwei Punkten wählt.

[H12] *Potentiale* **[4 Punkte]**

Welche der folgenden Kraftfelder besitzen ein Potential? Hierbei ist $\vec{r} \doteq (x, y, z)$. Geben Sie das etwaige Potential an.

(a) $\vec{F}(\vec{r}) \doteq (x, 0, 0)$;
(b) $\vec{F}(\vec{r}) \doteq (x, y, 0)$;
(c) $\vec{F}(\vec{r}) \doteq (-y, x, 0)$;
(d) $\vec{F}(\vec{r}) \doteq -(y+z, z+x, x+y)$.

Hinweis: Hier helfen Ihnen die in der Vorlesung eingeführten Integrabilitätsbedingungen $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$.

[H13 + C2] *Kraftfelder* **$[(1+1+1)+(1+1+1) = 3+3$ Punkte]**

Berechnen Sie die zu den folgenden Potentialen gehörenden Kraftfelder und erstellen Sie mit Hilfe der Funktion `ContourPlot` von MATHEMATICA Bilder der Äquipotentiallinien in der Ebene $z = 0$. Welche der zugehörigen Kraftfelder sind Zentralfelder?

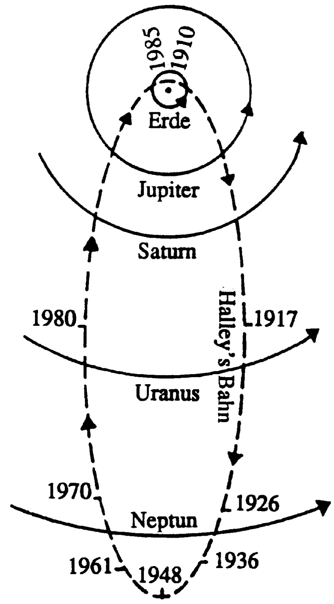
(a) $V(\vec{r}) = A(x^4 + y^4 + z^4), \quad A = \mathrm{const};$
(b) $V(\vec{r}) = A(x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2), \quad A = \mathrm{const};$
(c) $V(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}, \quad \vec{a} = \mathrm{const};$

Hinweise: Äquipotentiallinien sind die Graphen der Punktmengen $\{\vec{r} : V(\vec{r}) = \mathrm{const}\}$, hier also $\{(x, y) : V(x, y, 0) = \mathrm{const}\}$. Zentralfelder sind Felder $\vec{F}(\vec{r})$, die die Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r} = f(r)\vec{e}_r$ mit $r = |\vec{r}|$ haben. Sie zeigen also immer auf ein Zentrum hin oder von ihm weg, und die Kraft hängt in ihrer Stärke nur vom Abstand ab. Hierbei muss das Zentrum *nicht* im Ursprung liegen. Im Falle, dass das Zentrum am Ort $\vec{r}_0$ liegt, ist einfach $\vec{r}$ durch $\vec{r} - \vec{r}_0$ zu ersetzen. Drei Punkte sind für die Computerübung.

[H14] *Wiederkehrender Komet* **$[4 + 1 = 5$ Punkte]**

Ein Komet der Masse m spüre ausschließlich die Gravitationskraft der Sonne (idealisiert punktförmig mit Masse M und ruhend). Es sei der kürzeste Komet–Sonne–Abstand r_0 sowie der längste, r_1, bekannt.

(a) Die Erhaltungssätze liefern uns dann die Geschwindigkeit v_0 am sonnennächsten Punkt und v_1 am fernsten Punkt. Berechnen Sie auch den kleinsten Krümmungsradius κ^{-1} der Kometenbahn.
(b) Welche Werte für v_0, v_1, κ^{-1} ergeben sich mit $r_0 = 0.5\,\mathrm{AE}$ und $r_1 = 35\,\mathrm{AE}$? Hierbei ist $1\,\mathrm{AE} = 15 \cdot 10^7\,\mathrm{km}$, und $\gamma M = 39\,(\mathrm{AE})^3/(\mathrm{Jahr})^2$.



Das Bild gibt eine Skizze für die Bahn des Halleyschen Kometen. Unter dem Titel “Komet Halley's lange Reise durch unser Sonnensystem” brachte die Hannoversche Allgemeine Zeitung (HAZ) am 16.11.1985 einen Artikel mit dem Bild und seinen Daten, um auf die Wiederkehr des Kometen aufmerksam zu machen. Der Komet war damals mit Fernglas am Nachthimmel auszumachen.
Anfang 1997 war hingegen der Komet Hale-Bopp mit bloßem Auge deutlich zu sehen, ein extrem beeindruckendes Himmelsereignis. Während Halley alle 75 Jahre wiederkehrt, dauert es bei Hale-Bopp ein bisschen länger. Seine Bahn ist noch sehr viel extremer in die Länge gezogen, wir werden ihn erst im Jahre 4385 wieder sehen.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!